Objetivos a cubrir **Código : MAT-AL.1**

- Matrices. Operaciones entre matrices.
- Sistemas de m ecuaciones con n incognitas. Operaciones elementales sobre filas.
- Método de Gauss y método de Gauss-Jordan.
- Sistemas de ecuaciones homogéneos y no homogéneos consistentes e inconsistentes.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 1 *: Sean* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} \alpha^2 - 2 & \beta & 3 \\ 5 - \beta & 0 & -1 \end{pmatrix}$. *Hallar los valores de* α *y* β *para que* $A = B$.

Solución : Estas matrices no pueden ser iguales, ya que, $a_{23} \neq b_{23}$. ★

Ejemplo 2 *: Sean* $A = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ b^2 + 2 & a^4 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -1 & 2b - 1 \\ 3b & 1 \end{pmatrix}$. *Hallar los valores de* a *y* b *para que* $A = B$.

Solución : Observemos, en primer lugar, que ambas matrices son del mismo tamaño, 2×2. Veamos, ahora, cuales son los valores de a y b, para que sean iguales componentes a componentes, así, se deben cumplir las siguientes igualdades

$$a_{11} = b_{11} \implies a^2 = -1 \implies \boxed{a = \pm i}$$

$$a_{12} = b_{12} \implies b^2 = 2b - 1 \implies b^2 - 2b + 1 = 0 \implies (b-1)^2 = 0 \implies \boxed{b = 1}$$

$$a_{21} = b_{21} \implies b^2 + 2 = 3b \implies b^2 - 3b + 2 = 0 \implies (b-1)(b-2) = 0 \implies \boxed{b = 1} \text{ y } b = 2$$

$$a_{22} = b_{22} \implies a^4 = 1 \implies \boxed{a = \pm i}$$

Luego, los valores de a y b para que $A = B$ son $\boxed{a = \pm i}$ y $\boxed{b = 1}$ ★

Ejemplo 3 *: Sean* $C = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ *y* $k = -3$, *hallar* kC

Solución : Tenemos que

$$kC = -3 \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 3 & -12 \\ -9 & -15 & 0 \\ 6 & 3 & -12 \end{pmatrix} \implies B = \begin{pmatrix} -21 & 3 & -12 \\ -9 & -15 & 0 \\ 6 & 3 & -12 \end{pmatrix}$$

★

Ejemplo 4 *: Sean* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. *Hallar* $A + B$.

Solución : Tenemos que

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + (2) & 1 + (-3) \\ 2 + (-1) & -5 + (0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix},$$

luego, la matriz suma de las matrices A y B, viene dada por

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

★

Ejemplo 5 *: Sean* $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. *Hallar* AB.

Solución : En primer lugar, observemos que el producto $A_{3\times1}B_{1\times3}$ se puede realizar, ya que, el número de columnas de la matriz A coincide con el número de filas de la matriz B, además, se tiene que la matriz resultante, AB, es de tamaño 3×3

$$AB = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3)(-1) & (3)(4) & (3)(2) \\ (-3)(-1) & (-3)(4) & (-3)(2) \\ (2)(-1) & (2)(4) & (2)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 6 \\ 3 & -12 & -6 \\ -2 & 8 & 4 \end{pmatrix},$$

así,

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 6 \\ 3 & -12 & -6 \\ -2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

★

Ejemplo 6 *: Sean* $C = \begin{pmatrix} \pi & 4 \\ 1 & \sqrt{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$. *Hallar* CD.

Solución : En primer lugar, observemos que el producto $C_{3\times2}D_{1\times3}$ **NO** se puede realizar, ya que, el número de columnas de la matriz C no es igual al número de filas de la matriz D, por lo tanto, el producto CD no tiene sentido. ★

Ejemplo 7 *: Sean* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & -2 \end{pmatrix}$. *Hallar* B^2.

Solución : Tenemos que $B^2 = BB$, puesto que, la matriz B no es una matriz cuadrada, por lo tanto, B^2 **NO** tiene sentido. ★

Ejemplo 8 : *Sean*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} i & i-2 \\ 1 & i-1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Diga cuales de las siguientes operaciones tienen sentido y efectuelas

1. $A + B$ 2. $D - 2E$ 3. $5C$ 4. $CA - 2D$ 5. $B^2 + iA$ 6. $C^2 + D$

Solución : 1. Puesto que ambas matrices tienen el mismo tamaño 2×2, se puede realizar la operación, así, tenemos que

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & i-2 \\ 1 & i-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+i & i \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

2. La operación $D - 2E$ no tiene sentido, ya que las matrices no tienen el mismo tamaño.

3. Tenemos que

$$5C = 5 \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -15 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Realizamos la operación

$$CA - 2D = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{5}\right)(-1) + (2)(-2) & \left(\frac{1}{5}\right)(2) + (2)(1) \\ (-3)(-1) + (0)(-2) & (-3)(2) + (0)(1) \\ (1)(-1) + (1)(-2) & (1)(2) + (1)(1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 8 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{21}{5} & \frac{12}{5} \\ 3 & -6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 8 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{21}{5} - 1 & \frac{12}{5} + 2 \\ 3+4 & -6-8 \\ -3-6 & 3-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{26}{5} & \frac{22}{5} \\ 7 & -14 \\ -9 & -7 \end{pmatrix}$$

5. Tenemos que

$$B^2+iA=BB+iA=\begin{pmatrix} i & i-2 \\ 1 & i-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & i-2 \\ 1 & i-1 \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (i)(i)+(i-2)(1) & (i)(i-2)+(i-2)(i-1) \\ (1)(i)+(i-1)(1) & (1)(i-2)+(i-1)(i-1) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -i & 2i \\ -2i & i \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -3+i & -5i \\ -1+2i & -2-i \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -i & 2i \\ -2i & i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3+i-i & -5i+2i \\ -1+2i-2i & -2-i+i \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -3 & -3i \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

6. La operación C^2+D **NO** tiene sentido, puesto que, la matriz CB no es una matriz cuadrada, por lo tanto, CB^2 **NO** se puede realizar. ★

Ejemplo 9 *: Sean* $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ *y* $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. *Hallar las componentes del vector* $\boldsymbol{x}$ *para que* $A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}$ *sea igual al vector* $\mathbf{0}$.

Solución : Tenemos que

$$A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}=\mathbf{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de aquí

$$\begin{pmatrix} 2\alpha+3\beta-1 \\ 4\alpha-\beta-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha+3\beta-1=0 \\ 4\alpha-\beta-4=0 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha+3\beta=1 \\ 4\alpha-\beta=4 \end{array} \right.$$

cuya matriz asociada al sistema viene dada por

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1\to F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 4 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{-4F_1+F_2\to F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{7}F_2\to F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{3}{2}F_2+F_1\to F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{13}{14} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{array}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha=\frac{13}{14} \quad \text{y} \quad \beta=-\frac{2}{7}$$

★

Ejemplo 10 *: Hallar el valor de* c_1 *y* c_2, *tal que,* $c_1(2,1)+c_2(-1,1)=(0,0)$

Solución : Tenemos que

$$c_1(2,1)+c_2(-1,1)=(0,0) \quad \Longrightarrow \quad (2c_1,c_1)+(-c_2,c_2)=(0,0) \quad \Longrightarrow \quad (2c_1-c_2,c_1+c_2)=(0,0),$$

de aquí

$$\begin{cases} 2c_1-c_2=0 \\ c_1+c_2=0 \end{cases}, \qquad \text{la matriz aumentada asociada es} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Aplicamos el método de Gauss-Jordan para reducir la matriz

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1+F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

por lo tanto,

$$c_2=0$$

y como

$$c_1+c_2=0 \quad \Longrightarrow \quad c_1=-c_2 \quad \Longrightarrow \quad c_1=0.$$

Luego

$$c_1=0 \qquad \text{y} \qquad c_2=0$$

★

Ejemplo 11 *: Determine el valor de* a *para que los siguientes conjuntos de vectores sean ortogonales*

$$a. \quad \{(1,2),\ (a,5)\} \qquad\qquad b. \quad \{(1,2,-1),\ (3,1,a)\}$$

Solución : a. Es conocido que dos vectores son ortogonales si su producto escalar es igual a cero, así

$$(1,2)\cdot(a,5)=0 \quad \Longrightarrow \quad a+10=0 \quad \Longrightarrow \quad a=-10$$

b. Tenemos que

$$(1,2,-1)\cdot(3,1,a)=0 \quad \Longrightarrow \quad 3+2-a=0 \quad \Longrightarrow \quad a=5$$

★

Ejemplo 12 *: Considere la matriz*

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

Demuestre que la $n-$*ésima potencia de esta matriz es*

$$A^n=2^n\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Demostración : Usemos inducción matemática para demostrar la igualdad

Paso I : Verificamos la igualdad para $n = 1$

$$A = 2\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix} = A$$

Paso II : *Hipótesis inductiva* : Supongamos que se cumple para $n = h$

$$A^h = 2^h\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Paso III : *Tesis inductiva* : Demostremos la igualdad para el caso $n = h + 1$

$$A^{h+1} = A^h A = 2^h\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= 2^h\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} 2\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} = 2^{h+1}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix},$$

pero,

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} = A^2$$

así,

$$A^2 = \begin{pmatrix} (-1)(-1) + (4)(-2) + (3)(2) & (-1)(4) + (4)(5) + (3)(-4) & (-1)(3) + (4)(3) + (3)(-2) \\ (-2)(-1) + (5)(-2) + (3)(2) & (-2)(4) + (5)(5) + (3)(-4) & (-2)(3) + (5)(3) + (3)(-2) \\ (2)(-1) + (-4)(-2) + (-2)(2) & (2)(4) + (-4)(5) + (-2)(-4) & (2)(3) + (-4)(3) + (-2)(-2) \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix},$$

con lo que,

$$A^{h+1} = 2^{h+1} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

★

Ejemplo 13 *: Considere el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -4 \\ 14x_2 - 2x_3 = -15 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

1. *Escribir la matriz asociada al sistema.*
2. *Escribir la forma matricial del sistema,* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, *especificando* A, $\boldsymbol{x}$ *y* $\boldsymbol{b}$.
3. *Escribir la matriz aumentada del sistema.*
4. *Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.*

Solución : 1. Tenemos que la matriz asociada al sistema viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 14 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Tenemos que

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 14 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -15 \\ 4 \end{pmatrix},$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 14 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -15 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3. Matriz aumentada del sistema

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & 14 & -2 & -15 \\ 3 & 4 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

4. Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & 14 & -2 & -15 \\ 3 & 4 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 14 & -2 & -15 \\ 3 & 4 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1 + F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & -11 & 10 & 16 \\ 0 & 14 & -2 & -15 \\ 3 & 4 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-3F_1 + F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & -11 & 10 & 16 \\ 0 & 14 & -2 & -15 \\ 0 & -11 & 10 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2 + F_4 \rightarrow F_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & -11 & 10 & 16 \\ 0 & 14 & -2 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{11}F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -\dfrac{10}{11} & -\dfrac{16}{11} \\ 0 & 14 & -2 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-14F_2 + F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -\dfrac{10}{11} & -\dfrac{16}{11} \\ 0 & 0 & \dfrac{118}{11} & \dfrac{59}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

entonces,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{118}{11}x_3 &= \frac{59}{11} \\ x_2 - \frac{10}{11}x_3 &= -\frac{16}{11} \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= -4 \end{aligned}\right. \implies \left\{\begin{aligned} x_3 &= \frac{59}{118} \\ x_2 &= -\frac{16}{11} + \frac{10}{11}x_3 \\ x_1 &= -4 - 5x_2 + 4x_3 \end{aligned}\right. \implies \left\{\begin{aligned} &\boxed{x_3 = \frac{1}{2}} \\ &x_2 = -\frac{16}{11} + \left(\frac{10}{11}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &x_1 = -4 - 5x_2 + 4x_3 \end{aligned}\right.$$

$$\implies \left\{\begin{aligned} &x_3 = \frac{1}{2} \\ &\boxed{x_2 = -1} \\ &x_1 = -4 - 5(-1) + 4\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}\right. \implies \left\{\begin{aligned} &x_3 = \frac{1}{2} \\ &x_2 = -1 \\ &\boxed{x_1 = 3} \end{aligned}\right.$$

La solución del sistema es el vector

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

★

Ejemplo 14 *: Considere el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 6x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ -6x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 3 \end{cases}$$

1. *Escribir la matriz asociada al sistema.*
2. *Escribir la forma matricial del sistema,* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, *especificando* A, $\boldsymbol{x}$ *y* $\boldsymbol{b}$.
3. *Escribir la matriz aumentada del sistema.*
4. *Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.*

Solución : 1. Tenemos que la matriz asociada al sistema viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 6 & -2 & -5 \\ -6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Tenemos que

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 6 & -2 & -5 \\ -6 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 6 & -2 & -5 \\ -6 & 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Matriz aumentada del sistema

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -5 & 0 \\ -6 & 4 & 7 & 3 \end{array}\right)$$

4. Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -5 & 0 \\ -6 & 4 & 7 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{4}F_1 \to F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\dfrac{1}{2} & -1 & -\dfrac{1}{4} \\ 6 & -2 & -5 & 0 \\ -6 & 4 & 7 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-6F_1+F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\dfrac{1}{2} & -1 & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & \dfrac{3}{2} \\ -6 & 4 & 7 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{6F_1+F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\dfrac{1}{2} & -1 & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & \dfrac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \dfrac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\dfrac{1}{2} & -1 & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & \dfrac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

entonces,

$$\left\{\begin{array}{r} x_2 + x_3 = \dfrac{3}{2} \\ x_1 - \dfrac{1}{2}\,x_2 - x_3 = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{c} \boxed{x_3 = \dfrac{3}{2} - x_2} \\ x_1 = \dfrac{1}{2}\,x_2 + x_3 - \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{c} x_3 = \dfrac{3}{2} - x_2 \\ x_1 = \dfrac{1}{2}\,x_2 + \left(\dfrac{3}{2} - x_2\right) - \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

$$\implies \left\{\begin{array}{c} x_3 = \dfrac{3}{2} - x_2 \\ \boxed{x_1 = -\dfrac{1}{2}\,x_2 + \dfrac{5}{4}} \end{array}\right.$$

Así, el sistema tiene infinitas soluciones

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2}\,x_2 + \dfrac{5}{4} \\ x_2 \\ \dfrac{3}{2} - x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad x_2 \in \mathbb{R}.$$

★

Ejemplo 15 : *Hallar la(s) solucion(es) del siguiente sistema*

$$\left\{\begin{array}{l} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{array}\right.$$

Solución : Observemos que el sistema es homogeneo, por lo tanto, es consistente, es decir, siempre tiene solución. Consideremos la matriz aumentada asociada al sistema

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada (que es equivalente a aplicar las operaciones elementales a la matriz de coeficientes) para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-5F_1+F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 19 & -22 & 0 \\ 6 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-6F_1+F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 19 & -22 & 0 \\ 0 & 20 & -17 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{19}F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -\dfrac{22}{19} & 0 \\ 0 & 20 & -17 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-20F_2+F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -\dfrac{22}{19} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{117}{19} & 0 \end{array}\right)$$

entonces,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{117}{19}\, x_3 &= 0 \\ x_2 - \frac{22}{19}\, x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}\right. \implies \left\{\begin{aligned} &\boxed{x_3 = 0} \\ &x_2 = \frac{22}{19}\, x_3 \\ &x_1 = 3x_2 - 4x_3 \end{aligned}\right. \implies \left\{\begin{aligned} &x_3 = 0 \\ &\boxed{x_2 = 0} \\ &x_1 = 3x_2 - 4x_3 \end{aligned}\right.$$

$$\implies \left\{\begin{aligned} &x_3 = 0 \\ &x_2 = 0 \\ &\boxed{x_1 = 0} \end{aligned}\right.$$

La solución del sistema es la solución trivial, el vector $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ★

Ejemplo 16 *: Hallar la(s) solucion(es) del siguiente sistema*

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 = 0 \end{array}\right.$$

Solución : Observemos que el sistema es homogeneo, por lo tanto, es consistente, es decir, siempre tiene solución. Consideremos la matriz aumentada asociada al sistema

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada (que es equivalente a aplicar las operaciones elementales a la matriz de coeficientes) para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2F_1+F_2\to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-4F_1+F_3\to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}F_2\to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{7}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2F_2+F_3\to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{7}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

entonces,

$$\left\{\begin{array}{c} -2x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 + \dfrac{7}{2}\,x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{c} \boxed{x_3 = 2x_4} \\ x_2 = -\dfrac{7}{2}\,x_3 - x_4 \\ x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{c} x_3 = 2x_4 \\ \boxed{x_2 = -8x_4} \\ x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_3 = 2x_4 \\ x_2 = -8x_4 \\ \boxed{x_1 = 5x_4} \end{cases}$$

El sistema tiene infinitas soluciones,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 5x_4 \\ -8x_4 \\ 2x_4 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad x_4 \in \mathbb{R}.$$

★

Ejemplo 17 *: Dado el sistema de ecuaciones lineales*

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x + w = b \\ x + y + z = 1 \\ x - aw = 1 \end{cases}$$

Encuentre los valores de a *y* b *para que el sistema*

1. *Sea inconsistente.*
2. *Tenga infinitas soluciones. Halle las soluciones.*
3. *Tenga solución única. Halle la solución.*

Solución : Consideremos la matriz aumentada asociada al sistema

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -a & 1 \end{array}\right)$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada (que es equivalente a aplicar las operaciones elementales a la matriz de coeficientes) para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -a & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F_1+F_2\to F_2}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & b-1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -a & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{-3F_1+F_3\to F_3}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & b-1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -a & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F_1+F_4\to F_4}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & b-1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -a & 0 \end{array}\right)\xrightarrow{-F_2\to F_2}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1-b \\ 0 & -1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -a & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2+F_3\to F_3}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1-b \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1-b \\ 0 & -1 & -1 & -a & 0 \end{array}\right)\xrightarrow{F_2+F_4\to F_4}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1-b \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1-b \\ 0 & 0 & 0 & -1-a & 1-b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}F_3\to F_3}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1-b \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1+b}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1-a & 1-b \end{array}\right)\xrightarrow{-F_4\to F_4}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1-b \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1+b}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1+a & b-1 \end{array}\right)$$

1. Si $a=-1$ y $b\neq 1$, entonces la matriz queda

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1-b \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1+b}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right)$$

Observemos que la cuarta fila nos lleva a la ecuación

$$0x+0y+0z+0w=b-1 \quad\Longrightarrow\quad 0=b-1,$$

es decir, $b=1$, pero tenemos que $b\neq 1$. Por lo tanto, el sistema es **inconsistente** si $a=-1$ y $b\neq 1$.

2. Sean $a=-1$ y $b=1$, entonces la matriz queda

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Observemos que la cuarta fila nos lleva a la ecuación

$$0x+0y+0z+0w= \quad\Longrightarrow\quad 0=0,$$

lo cual simepre se cumple. Por lo tanto, el sistema es **consistente** si $a=-1$ y $b=1$ y tiene infinitas soluciones, ya que

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y+z-w=0 \\ z+\frac{1}{3}\,w=\frac{2}{3} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y+z-w=0 \\ \boxed{w=2-3z} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y=-z+(2-3z) \\ w=2-3z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ \boxed{y=2-4z} \\ w=2-3z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-(2-4z)-z \\ y=2-4z \\ w=2-3z \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x=3z-1} \\ y=2-4z \\ w=2-3z \end{array}\right.$$

luego, las infinitas soluciones vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z-1 \\ 2-4z \\ z \\ 2-3z \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad z \in \mathbb{R}.$$

3. Si $a \neq -1$, entonces de la matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1-b \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1+b}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1+a & b-1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y+z-w=1-b \\ z+\frac{1}{3}\,w=\frac{1+b}{3} \\ (a+1)\,w=b-1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y+z-w=1-b \\ z+\frac{1}{3}\,w=\frac{1+b}{3} \\ \boxed{w=\frac{b-1}{a+1}} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y+z-w=1-b \\ z=\frac{1+b}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{b-1}{a+1}\right) \\ w=\frac{b-1}{a+1} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y+z-w=1-b \\ \boxed{z=\frac{ab+a+2}{3\,(a+1)}} \\ w=\frac{b-1}{a+1} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ y = 1-b-\dfrac{ab+a+2}{3(a+1)}+\left(\dfrac{b-1}{a+1}\right) \\ z = \dfrac{ab+a+2}{3(a+1)} \\ w = \dfrac{b-1}{a+1} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ \boxed{y = \dfrac{2(a-2ab-1)}{3(a+1)}} \\ z = \dfrac{ab+a+2}{3(a+1)} \\ w = \dfrac{b-1}{a+1} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 1-\dfrac{2(a-2ab-1)}{3(a+1)}-\dfrac{ab+a+2}{3(a+1)} \\ y = \dfrac{2(a-2ab-1)}{3(a+1)} \\ z = \dfrac{ab+a+2}{3(a+1)} \\ w = \dfrac{b-1}{a+1} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \boxed{x = \dfrac{3ab+1}{3(a+1)}} \\ y = \dfrac{2(a-2ab-1)}{3(a+1)} \\ z = \dfrac{ab+a+2}{3(a+1)} \\ w = \dfrac{b-1}{a+1} \end{cases}$$

por lo tanto, el sistema es **consistente** y tiene una única solución si $a \neq -1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3ab+1}{3(a+1)} \\ \dfrac{2(a-2ab-1)}{3(a+1)} \\ \dfrac{ab+a+2}{3(a+1)} \\ \dfrac{b-1}{a+1} \end{pmatrix}$$

★

Ejemplo 18 : *Hallar el valor de las constantes para que el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} x+3y+z=2 \\ x+2y-5z=4 \\ 2x+5y-\lambda^2 z = \lambda+4 \end{cases}$$

(a). *Tenga solución única y hallarla.*

(b). *Tenga infinitas soluciones y hallarlas.*

(c). *No tenga solución.*

Solución : Tenemos que las matrices del sistema son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -\lambda^2 \end{pmatrix}, \qquad \overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \lambda+4 \end{pmatrix}$$

la matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 & 4 \\ 2 & 5 & -\lambda^2 & \lambda+4 \end{array}\right)$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada (que es equivalente a aplicar las operaciones elementales a la matriz de coeficientes) para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 & 4 \\ 2 & 5 & -\lambda^2 & \lambda+4 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_1+F_3 \to F_3]{-F_1+F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & -2-\lambda^2 & \lambda \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & -2-\lambda^2 & \lambda \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4-\lambda^2 & \lambda-2 \end{array}\right),$$

es decir, la matriz se puede escribir como

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & (2-\lambda)(2+\lambda) & \lambda-2 \end{array}\right)$$

1. Tenga solución única y hallarla. Si $\lambda \neq 2$, el sistema queda como

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2+\lambda & -1 \end{array}\right)$$

   Si $\lambda \neq -2$, el sistema tiene solución única, la cual viene dada por

   - De la fila 3, se tiene:

$$(2+\lambda)\, z = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad z = -\frac{1}{2+\lambda}.$$

   - De la fila 2, se tiene:

$$y + 6z = -2 \qquad \Longrightarrow \qquad y = -2 + \frac{6}{2+\lambda} \qquad \Longrightarrow \qquad y = -\frac{2(\lambda-1)}{\lambda+2}.$$

   - De la fila 1, se tiene:

$$x + 3y + z = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 2 - 3\left(-\frac{2(\lambda-1)}{\lambda+2}\right) - \left(-\frac{1}{\lambda+2}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{8\lambda-1}{\lambda+2}$$

la única solución es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{8\lambda - 1}{\lambda + 2} \\ -\dfrac{2(\lambda - 1)}{\lambda + 2} \\ -\dfrac{1}{\lambda + 2} \end{pmatrix}$$

2. Tenga infinitas soluciones y hallarlas. Si $\lambda = 2$, el sistema tiene infinitas soluciones, las cuales vienen dadas por

   - De la fila 2, se tiene:
   $$y + 6z = -2 \qquad \Longrightarrow \qquad y = -2 - 6z.$$
   - De la fila 1, se tiene:
   $$x + 3y + z = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 17z + 8.$$

   Así, las infinitas soluciones son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17z + 8 \\ -6z - 2 \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad z \in \mathbb{R}.$$

3. No tenga solución. Si $\lambda = -2$, entonces, el sistema no tiene solución.

★

Ejemplo 19 *: Hallar el valor de las constantes para que el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} 3x - 4y + 7z = b - 11 \\ x - y + 2z = -3 \\ 2x - y + 3z = -4 \\ -x + 3y + (a - 4) z = b + 7 \end{cases}$$

(*a*). *Tenga solución única y hallarla.*

(*b*). *Tenga infinitas soluciones y hallarlas.*

(*c*). *No tenga solución.*

Solución : Tenemos que las matrices del sistema son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & a - 4 \end{pmatrix}, \qquad \overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \overline{b} = \begin{pmatrix} b - 11 \\ -3 \\ -4 \\ b + 7 \end{pmatrix}$$

la matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 7 & b - 11 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & a - 4 & b + 7 \end{array}\right).$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada (que es equivalente a aplicar las operaciones elementales a la matriz de coeficientes) para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 7 & b-11 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & a-4 & b+7 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -16\quad 2 & -3 & \\ 3 & -4 & 7 & b-11 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & a-4 & b+7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1+F_4 \to F_4}]{\substack{-3F_1+F_2 \to F_2 \\ -2F_1+F_3 \to F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & b-2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & a-2 & b+4 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2-b \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & a-2 & b+4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{-F_2+F_3 \to F_3 \\ -2F_2+F_4 \to F_4}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & a & 3b \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2-b \\ 0 & 0 & a & 3b \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right)$$

1. Tenga solución única y hallarla. Si $b = 0$ y $a \neq 0$, entonces, el sistema tiene una única solución, la cual viene dada por

   - De la fila 3, se tiene:
   $$az = 0 \quad \Longrightarrow \quad z = 0.$$
   - De la fila 2, se tiene:
   $$y - z = 2 \quad \Longrightarrow \quad y = 2.$$
   - De la fila 1, se tiene:
   $$x - y + 2z = -3 \quad \Longrightarrow \quad x = -1.$$

   Así, la única solución es
   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Tenga infinitas soluciones y hallarlas. Si $b = 0$ y $a = 0$, entonces, el sistema tiene infinitas soluciones, las cuales vienen dada por

   - De la fila 2, se tiene:
   $$y - z = 2 \quad \Longrightarrow \quad y = 2 + z.$$
   - De la fila 1, se tiene:
   $$x - y + 2z = -3 \quad \Longrightarrow \quad x = -z - 1.$$

Así, las infinitas soluciones son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z-1 \\ z+2 \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{con} \quad z \in \mathbb{R}.$$

3. No tenga solución. Si $b \neq 0$, entonces, el sistema no tiene solución. ★

Ejemplo 20 *: Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas ó falsas.*

1. Si $AB = 0$ entonces $A = 0$ y/o $B = 0$.

2. Si $AB = AC$ entonces $B = C$.

Solución :

1. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

son diferentes de cero, pero $AB = 0$. Por la tanto, la proposición es **FALSA**.

2. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

se tiene que $AB = AC = 0$, pero $B \neq C$. Por la tanto, la proposición es **FALSA**. ★

Ejemplo 21 *: Sean $\boldsymbol{\alpha} = (1,2)$, $\boldsymbol{\beta} = (-1,1)$. Si $\boldsymbol{\gamma}$ es un vector tal que $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma} = -1$ y $\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 3$. Hallar $\boldsymbol{\gamma}$.*

Solución : Sea $\boldsymbol{\gamma} = (a,b)$, entonces

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma} = -1 \quad \Longrightarrow \quad (1,2) \cdot (a,b) = -1 \quad \Longrightarrow \quad a + 2b = -1,$$

mientras que,

$$\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 3 \quad \Longrightarrow \quad (-1,1) \cdot (a,b) = 3 \quad \Longrightarrow \quad -a + b = 3,$$

así, resolvemos el sistema

$$\begin{cases} a + 2b = -1 \\ -a + b = 3 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad a = -\frac{7}{3}, \quad b = \frac{2}{3}.$$

Así, el vector buscado es $\boldsymbol{\gamma} = \left(-\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$. ★

Ejercicios

1. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \alpha^2 + 2 & \beta & 4 \\ \beta + 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar los valores de α y β para que $A = B$.

2. Sean $A = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ b^2+2 & a^4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2b-1 \\ 3b & 1 \end{pmatrix}$. Hallar los valores de a y b para que $A = B$.

3. Sean $A = \begin{pmatrix} \alpha^3 & 1 \\ \gamma^2 & \alpha+\beta \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -2 & -2+\sqrt{3}i \\ \beta^2 & -1 \end{pmatrix}$. Hallar los valores de α, β y γ para que $A = B$.

4. Sean

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \; ; \quad B = \begin{pmatrix} i & 2-i \\ -3i & 1 \end{pmatrix} \; ; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \; ; \quad D = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Diga cuales de las siguientes operaciones tienen sentido y efectuelas.

1. $A + B$ 2. $D + 2E$ 3. $4E$ 4. $3D - CA$ 5. $B^3 - iA$ 6. $E^2 - C$

7. $2iBE$ 8. $BE + D$ 9. $3DE$ 10. $A^2 + DB$ 11. $ED - B^3$ 12. $iA^2 - (EC)^2$

5. Encuentre los valores de x, y, z que satisfagan la igualdad

$$\begin{pmatrix} x-y & -1 & 2 \\ 1 & y & -x \\ 0 & z & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 & z \\ -z & 2 & 3 \\ -2 & 3 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Encuentre los valores de a, b y c, para que se satisfaga la igualdad

$$\begin{pmatrix} 3-a & b & -2 \\ 4 & 1-c & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & a+b & 4 \\ 1-c & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

7. Resuelva la ecuación matricial

$$2X + 4A = 3B + 2A$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Sea D una matriz cuadrada de orden 2 diagonal.

   (a) Demuestre que la matriz A^2 también es diagonal. Halle la forma de la matriz A^2.

(b) Demuestre que la matriz A^3 también es diagonal. Halle la forma de la matriz A^3.

(c) ¿Podría generalizar los resultados obtenidos en los ejercicios 8a y 8b para la matriz potencia A^n, con $n \in \mathbb{N}$?

9. Sea D una matriz cuadrada de orden 3 diagonal.

   (a) Demuestre que la matriz A^2 también es diagonal. Halle la forma de la matriz A^2.

   (b) Demuestre que la matriz A^3 también es diagonal. Halle la forma de la matriz A^3.

   (c) ¿Podría generalizar los resultados obtenidos en los ejercicios 9a y 9b para la matriz potencia A^n, con $n \in \mathbb{N}$?

10. Si A es una matriz cuadrada de orden n, diagonal ¿Podría generalizar los resultados obtenidos en los ejercicios 8 y 9 para la matriz potencia A^m, con $m \in \mathbb{N}$?

11. Sea $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar A^n. ¿Si n es suficientemente grande, entonces A^n es igual a?

12. Calcular las potencias de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

13. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

   Demuestre que la $n-$ésima potencia de esta matriz es

$$A^n = 2^n \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

14. Demuestre que si $A = \begin{pmatrix} -2 & -9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, entonces,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1-3n & -9n \\ n & 1+3n \end{pmatrix}, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

15. Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique todas sus respuestas.

   (a) Si A y B son matrices $n \times n$, entonces $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

   (b) Si A y B son matrices $n \times n$, entonces $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$.

   (c) Si A es una matriz cuadrada de orden n e I es la matriz identidad de orden n, entonces $(A+I)^2 = A^2 + 2A + I$.

(d) Cualesquiera que sean las matrices A, B y C de tamaño $n \times n$, tales que $AB = AC$, se cumple que $B = C$.

(e) Si A y B son matrices $n \times n$, entonces $B(AB - BA) = AB^2 - B^2 A$.

(f) Sean A y B dos matrices cuadradas $n \times n$. Luego

$$AB = BA \quad \Longrightarrow \quad (I_n - 2B)\,A = (I_n - 2A)\,B$$

(g) Sea A una matriz cuadrada $n \times n$, tal que $A^2 = 3A - I$, entonces $A^3 = 3A - I$.

(h) Si $AB = 0$ entonces $A = 0$ y/o $B = 0$.

(i) Si $AB = AC$ entonces $B = C$.

16. Hallar la familia de matrices que cumplen la ecuación

$$a^3A^3 + 3a^2A^2 + 3aA + I = 0$$

17. Sea $A = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & i \\ i & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$. Demuestre que A es simétrica y que $A^2 = A$. La matrices que son simétrica y cumple con $A^2 = A$ se denominan **idempotentes**.

18. De un ejemplo de una matriz que no sea idempotente.

19. Sean a, b, c números reales tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ y consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Demostrar que la matriz A es antisimétrica.

(b) Probar que la matriz $M = A^2 + I$ es simétrica.

(c) Demostrar que la matriz M es idempotente.

20. Demuestre que si A y B son matrices que conmutan, entonces $(AB)^2 = A^2B^2$.

21. Sean

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} i-1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcular

1. $A - 2B^t$ 2. $A^t + iB$ 3. $3iA^t - (5iB)^t$ 4. $(BA)^t$ 5. $(AB)^t$

22. Demuestre que si A es una matriz cuadrada de orden n, antisimétrica, entonces todas las componentes de la diagonal principal son cero.

23. Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique todas sus respuestas.

(a) Si A y B son simétricas $n \times n$, entonces $A^2 + B^2$ es simétrica.

(b) Si A y B son antisimétricas $n \times n$, entonces AB es simétrica.

(c) Si A es una matriz cuadrada de orden n, entonces $A + A^t$ es simétrica.

(d) Si P y Q son ortogonales $n \times n$, entonces $P+Q$ también lo es.

(e) Sean A, B y C matrices cuadradas $n \times n$, si C y B son simétricas e invertibles, entonces la matriz $C^t + B^{-1}A^tC^{-1}$ es simétrica.

(f) La matriz $\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}$ es ortogonal.

(g) Si Q es ortogonal y simétrica, entonces $Q^2 = I$.

(h) Si P es ortogonal, entonces P^2 lo es.

24. Demuestre que si A es una matriz cuadrada de orden n, simétrica, entonces $(AB)^t = BA$.

25. Demuestre que la si A es una matriz simétrica, entonces, A es una matriz normal, es decir, la matriz cumple con $A^tA = AA^t$.

26. Demuestre que la si A es una matriz antsimétrica, entonces, A es una matriz normal.

27. Demuestre que la si A es una matriz ortogonal, entonces, A es una matriz normal.

28. Resuelva el siguiente sistema matricial

1. $\begin{cases} 2X - 7Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \\ -X + 4Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3X + Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$

3. $\begin{cases} X^t + 3Y = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \\ 2X^t - Y = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \end{cases}$

4. $\begin{cases} (2X - 7Y)^t = \begin{pmatrix} -i & 2+5i \\ 1-2i & 2 \end{pmatrix} \\ X^t + iY^t = \begin{pmatrix} 2i & 2-i \\ 3i & 2+i \end{pmatrix} \end{cases}$

5. $\begin{cases} (2X - 7Y)^t = \begin{pmatrix} -i & 2+5i \\ 1-2i & 2 \end{pmatrix} \\ X + iY = \begin{pmatrix} 2i & 2-i \\ 3i & 2+i \end{pmatrix} \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2X^t + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ X + 2Y^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$

29. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Hallar las componentes del vector $\boldsymbol{x}$ para que $A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$ sea igual al vector $\mathbf{0}$.

30. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix}$. Hallar las componentes del vector x para que $Ax - b$ sea igual al vector 0.

31. Sean $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -2 & 2i \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 2i \\ -4 \end{pmatrix}$. Hallar las componentes del vector x para que $Ax = b$.

32. Hallar el valor de c_1 y c_2, tal que, $c_1\,(2,1) + c_2\,(-1,1) = (0,0)$.

33. Hallar el valor de c_1, c_2 y c_3, tal que $c_1\,(1,0,1) + c_2\,(0,1,1) + c_3\,(1,1,0) = (0,0,0)$.

34. Hallar el valor de c_1, c_2 y c_3, tal que $c_1\,(1,1,1) + c_2\,(-1,3,4) + c_3\,(-3,5,7) = (0,0,0)$.

35. Hallar el valor de c_1, c_2 y c_3, tal que $c_1\,(1,0,0) + c_2\,(1,1,0) + c_3\,(-1,-1,-1) = (0,0,0)$.

36. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, con a real y $a > 0$. ¿Para qué valores de a se cumplirá

    a. $A^2 = A$ *b.* $A^2 = I$ *c.* $A^2 = 0$?

37. Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique todas sus respuestas.

    (a) Si x_1 y x_2 son soluciones del sistema $Ax = 0$ y si c_1 y c_2 son escalares, entonces, $c_1x_1 + c_2x_2$ también es solución de dicho sistema.
    (b) Si y y z son soluciones del sistema $Ax = b$, entonces $w = \dfrac{1}{4}\,y + \dfrac{3}{4}\,z$ también lo es.
    (c) Para todo sistema $Ax = 0$, con A una matriz de tamaño $m \times n$, $m > n$, hay solución única.
    (d) Si x_1 y x_2 son soluciones del sistema $Ax = b$, entonces $x_1 + x_2$ también es solución de dicho sistema.
    (e) Si x_1 y x_2 son soluciones del sistema $Ax = b$, entonces $x_1 - x_2$ es solución del sistema homogéneo asociado, es decir, del sistema $Ax = 0$.
    (f) Si x_1 y x_2 son soluciones del sistema $Ax = b$, entonces $x_1 + x_2$ es solución del sistema homogéneo asociado, es decir, del sistema $Ax = 0$.
    (g) Un sistema compatible determinado puede tener más incógnitas que ecuaciones.
    (h) Un sistema compatible determinado puede tener más ecuaciones que incógnitas.
    (i) Un sistema compatible determinado puede tener más ecuaciones independientes que incógnitas.
    (j) Para todo sistema incompatible se verifica que el número de ecuaciones independientes es mayor o igual que el de incógnitas.
    (k) El número de ecuaciones independientes de todo sistema compatible indeterminado es menor que el número de incógnitas.
    (l) No existen sistemas compatibles indeterminados con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

38. Dar un ejemplo de un sistema incompatible con dos ecuaciones y tres incógnitas.

39. Dar un ejemplo de un sistema compatible determinado con tres ecuaciones y dos incógnitas.

40. Dar un ejemplo de un sistema incompatible con tres ecuaciones y dos incógnitas.

41. Dar un ejemplo de un sistema compatible indeterminado con tres ecuaciones y tres incógnitas.

42. Hallar un sistema de ecuaciones cuya solución general sea

$$x_1 = -\frac{7}{3} + t, \qquad x_2 = u, \qquad x_3 = 3t - 2u.$$

43. Hallar un sistema de ecuaciones cuya solución general sea

$$x_1 = -9 + t, \qquad x_2 = -10 + 2t, \qquad x_3 = -t.$$

44. Hallar un sistema de ecuaciones cuya solución general sea

$$x_1 = -\frac{13}{5} + t + u, \qquad x_2 = \frac{12}{5} + t, \qquad x_3 = u, \qquad x_4 = 5t + 2u.$$

45. Sean $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Si $c_1 a + c_2 b = x$, entonces

(a) Expresar las constantes c_1, c_2 en términos de α y β.

(b) Encontrar los valores de c_1, c_2 en términos de $(\alpha, \beta) = (3, 4)$.

(c) Encontrar los valores de c_1, c_2 en términos de $(\alpha, \beta) = (-1, 0)$.

(d) Encontrar los valores de c_1, c_2 en términos de $(\alpha, \beta) = \left(5, \frac{1}{2}\right)$.

(e) Encontrar los valores de c_1, c_2 en términos de $(\alpha, \beta) = (\pi, e^2)$.

46. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

(a) Escribir la matriz asociada al sistema.

(b) Escribir la forma matricial del sistema, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, especificando A, $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$.

(c) Escribir la matriz aumentada del sistema.

(d) Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.

47. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ 3x - 2y + 3z = 6 \end{cases}$$

(a) Escribir la matriz asociada al sistema.

(b) Escribir la forma matricial del sistema, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, especificando A, $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$.

(c) Escribir la matriz aumentada del sistema.

(d) Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.

48. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -4 \\ 14x_2 - 2x_3 = -15 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

(a) Escribir la matriz asociada al sistema.

(b) Escribir la forma matricial del sistema, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, especificando A, $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$.

(c) Escribir la matriz aumentada del sistema.

(d) Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.

49. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 6x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ -6x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 3 \end{cases}$$

(a) Escribir la matriz asociada al sistema.

(b) Escribir la forma matricial del sistema, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, especificando A, $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$.

(c) Escribir la matriz aumentada del sistema.

(d) Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.

50. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 13 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = -5 \end{cases}$$

(a) Escribir la matriz asociada al sistema.

(b) Escribir la forma matricial del sistema, $Ax = b$, especificando A, x y b.

(c) Escribir la matriz aumentada del sistema.

(d) Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.

51. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 + 5x_3 - 2x_4 = 6 \\ -2x_1 - x_2 + 6x_4 = -7 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

(a) Escribir la matriz asociada al sistema.

(b) Escribir la forma matricial del sistema, $Ax = b$, especificando A, x y b.

(c) Escribir la matriz aumentada del sistema.

(d) Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.

52. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 15x_1 + 10x_2 - 5x_3 = -4 \\ 25x_1 - 15x_2 - 21x_3 = -13 \\ -10x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 9 \end{cases}$$

(a) Escribir la matriz asociada al sistema.

(b) Escribir la forma matricial del sistema, $Ax = b$, especificando A, x y b.

(c) Escribir la matriz aumentada del sistema.

(d) Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.

53. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 6x_2 - 11x_3 = 4 \end{cases}$$

(a) Escribir la matriz asociada al sistema.

(b) Escribir la forma matricial del sistema, $Ax = b$, especificando A, x y b.

(c) Escribir la matriz aumentada del sistema.

(d) Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.

54. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 8x_4 = 8 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = -4 \\ -x_1 - 3x_2 + 18x_3 - 12x_4 = 12 \\ x_1 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -4 \end{cases}$$

(a) Escribir la matriz asociada al sistema.

(b) Escribir la forma matricial del sistema, $Ax = b$, especificando A, x y b.

(c) Escribir la matriz aumentada del sistema.

(d) Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.

55. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 5x_3 - 2x_4 = -2 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$$

(a) Escribir la matriz asociada al sistema.

(b) Escribir la forma matricial del sistema, $Ax = b$, especificando A, x y b.

(c) Escribir la matriz aumentada del sistema.

(d) Utilice el método de eliminación de Gauss para obtener las soluciones del sistema, si es que existen.

56. Hallar las soluciones de los siguientes sistemas

$$a. \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \qquad b. \begin{cases} x + 3y - 5z + w = 0 \\ 2x + 5y - 2z + 6w = 0 \end{cases} \qquad c. \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

$$d.\quad \begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \qquad e.\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

$$f.\quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad g.\quad \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 7x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$$

$$h.\quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 6x_1 + x_2 - 7x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases} \qquad i.\quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 5x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

57. Dada la matriz A. Hallar una matriz B, tal que, $AB = I$.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
8. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$
9. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

58. Hallar el valor de las constantes para que cada uno de los sistemas de ecuaciones dado a continuación cumpla con lo siguiente

(a) Tenga solución única y hallarla.
(b) Tenga infinitas soluciones y hallarlas.
(c) No tenga solución

1. $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 4x+5y+6z=1 \\ 3x+6y+\alpha z=3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+y+2z=2 \\ 2x-y+3z=2 \\ 5x-y+\alpha z=6 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2x+y+10z=1 \\ x+5z=-1 \\ -3x+\alpha z=3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x+y+z=8 \\ y+2z=3 \\ x+\alpha z=0 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x+\alpha z=1 \\ x+3y+\alpha z=1 \\ y+2z=0 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x+y+3z=-5 \\ x+y+z=0 \\ \alpha x+(2\alpha-1)\,y+z=-10 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5x-4y+13z=\alpha \\ 12x+3y-z=2\alpha \\ 9x-y-5z=3\alpha z \end{cases}$ 8. $\begin{cases} \alpha x+2y+3z=1 \\ \alpha^2 x+4y+9z=2 \\ \alpha^3 x+8y+27z=3 \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 3x-4y+7z=b-11 \\ x-y+2z=-3 \\ 2x-y+3z=-4 \\ -x+3y+(a-4)\,z=b+7 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+y=3 \\ x+\left(a^2-8\right)y=a \end{cases}$ 11. $\begin{cases} ax+ay-z=2 \\ 3x-ay=0 \\ 5x+ay=0 \\ x+2y=1 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x+3y+z=2 \\ x+2y-5z=4 \\ 2x+5y-\lambda^2 z=\lambda+4 \end{cases}$

59. Considerar el sistema $Ax=b$, con $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1-\alpha \\ 0 & \alpha & 2 \\ \alpha & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determinar los valores de α para los cuales el sistema

$a.$ Tenga solución única. $b.$ Tenga infinitas soluciones. $c.$ No tenga solución.

60. Sean $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $b=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$a.$ Hallar α, tal que $(AB)\,x=b$ tenga solución única. $b.$ Resolver el sistema si $\alpha=1$.

61. Sean $\boldsymbol{\alpha}=(1,2)$, $\boldsymbol{\beta}=(-1,1)$. Si $\boldsymbol{\gamma}$ es un vector tal que $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}=-1$ y $\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma}=3$. Hallar $\boldsymbol{\gamma}$.

Respuestas: Ejercicios

1. No existen valores; 2. $a=\pm i$ y $b=1$; 3. $\alpha=\sqrt{3}i-1$, $\beta=-1$ y $\gamma=\pm\sqrt{2}i$; 4.1. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+i & \frac{7}{3}-i \\ \frac{2}{3}-3i & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$;

4.2. No tiene sentido; 4.3. $\begin{pmatrix} 20 & 4 & 24 \\ -20 & -4 & 24 \end{pmatrix}$; 4.4. $\begin{pmatrix} -\frac{29}{12} & -\frac{47}{30} \\ \frac{1}{6} & \frac{11}{3} \\ \frac{11}{3} & -\frac{17}{3} \end{pmatrix}$; 4.5. $\begin{pmatrix} 9-\frac{27}{2}i & -11-\frac{22}{3}i \\ -15+\frac{25}{3}i & 1-\frac{35}{2}i \end{pmatrix}$;

4.6. No tiene sentido; 4.7. $\begin{pmatrix} -20-20i & -4-4i & 24i \\ 30-10i & 6-2i & 36+12i \end{pmatrix}$; 4.8. No tiene sentido;

4.9. $\begin{pmatrix} -\frac{57}{4} & -\frac{57}{20} & -\frac{99}{10} \\ -\frac{15}{2} & -\frac{3}{2} & 9 \\ 30 & 6 & 36 \end{pmatrix}$; 4.10. No tiene sentido; 4.11. $\begin{pmatrix} -\frac{3}{4}+13i & \frac{25}{2}+7i \\ \frac{123}{4}-9i & -\frac{5}{2}+15i \end{pmatrix}$;

4.12. $\begin{pmatrix} -320+\frac{17}{36}i & -256+i \\ -256+2i & -320+\frac{233}{36}i \end{pmatrix}$; 5. $x=-1, \quad y=2, \quad z=1$; 6. $a=6, \quad b=0, \quad c=3$; 7. $X=\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

11. $A^n = A$. Si n es suficientemente grande, entonces $A^n = A$; 12. $A^{3n-2}=A, \quad A^{3n-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^{3n}=I, \quad n\in\mathbb{N}$.;

15.*a*. Falso; 15.*b*. Falso; 15.*c*. Verdadero; 15.*d*. Falso; 15.*e*. Falso; 15.*f*. Falso; 15.*g*. Falso; 15.*h*. Falso;

15.*i*. Falso; 16. $A=\frac{1}{a}I$; 21.1. $\begin{pmatrix} 1-2i & 5 \\ -2 & -9 \end{pmatrix}$; 21.2. $\begin{pmatrix} -2-i & 2+2i \\ 3-i & 1+5i \end{pmatrix}$; 21.3. $\begin{pmatrix} 5+2i & 11i \\ -i & -22i \end{pmatrix}$;

21.4. $\begin{pmatrix} 5-i & 11 \\ -1+3i & 2 \end{pmatrix}$; 21.5. $\begin{pmatrix} -2-i & -3+2i \\ 13 & 9 \end{pmatrix}$; 23.*a*. Verdadero; 23.*b*. Falso; 23.*c*. Verdadero;

23.*d*. Falso; 23.*e*. Falso; 23.*f*. Verdadero; 23.*g*. Verdadero; 23.*h*. Verdadero; 28.1. $X=\begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 10 & 27 \end{pmatrix}$,

$Y=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$; 28.2. $X=\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} \\ \frac{7}{5} & 1 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{16}{5} \\ -\frac{16}{5} & -1 \end{pmatrix}$; 28.3. $X^t=\begin{pmatrix} \frac{15}{7} & \frac{10}{7} \\ -\frac{10}{7} & -\frac{15}{7} \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} \frac{9}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{9}{7} \end{pmatrix}$;

28.4. $X^t=\begin{pmatrix} \frac{35}{53}+\frac{96}{53}i & 1-i \\ \frac{58}{53}+\frac{150}{53}i & \frac{116}{53}+\frac{35}{53}i \end{pmatrix}$, $Y^t=\begin{pmatrix} \frac{10}{53}+\frac{35}{53}i & -i \\ \frac{9}{53}+\frac{58}{53}i & \frac{18}{53}+\frac{10}{53}i \end{pmatrix}$; 28.5. $X=\begin{pmatrix} \frac{35}{53}+\frac{96}{53}i & \frac{100}{53}-\frac{74}{53}i \\ \frac{11}{53}+\frac{171}{53}i & \frac{116}{53}+\frac{35}{53}i \end{pmatrix}$,

$Y=\begin{pmatrix} \frac{10}{53}+\frac{35}{53}i & \frac{21}{53}-\frac{6}{53}i \\ -\frac{12}{53}+\frac{11}{53}i & \frac{18}{53}+\frac{10}{53}i \end{pmatrix}$; 28.6. $X=\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$, $Y^t=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{5}{3} & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$; 29. $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} \frac{13}{14} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$;

30. $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$; 31. $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 2+i\beta \\ \beta \end{pmatrix}$; 32. $c_1=0, \quad c_2=0$; 33. $c_1=0, \quad c_2=0, \quad c_3=0$;

34. $c_1=c_3, \quad c_2=-2c_3$; 35. $c_1=0, \quad c_2=0, \quad c_3=0$; 36.*a*. No existe solución; 36.*b*. No existe solución;

36.*c*. No existe solución; 37.*a*. Verdadero; 37.*b*. Verdadero; 37.*c*. Falso; 37.*d*. Falso; 37.*e*. Verdadero;

37.*f*. Falso; 37.*g*. Falso; 37.*h*. Verdadero; 37.*i*. Falso; 37.*j*. Verdadero; 37.*k*. Verdadero; 37.*l*. Falso;

45.*a*. $c_1=\frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{3}\beta, \quad c_2=-\frac{1}{3}\alpha+\frac{2}{3}\beta$; 45.*b*. $c_1=\frac{14}{3}, \quad c_2=\frac{5}{3}$; 45.*c*. $c_1=-\frac{2}{3}, \quad c_2=\frac{1}{3}$; 45.*d*. $c_1=\frac{11}{3}, \quad c_2=-\frac{4}{3}$;

$45.e.\quad c_1=\frac{2\pi+2e^2}{3},\quad c_2=\frac{2e^2-\pi}{3};$ $\qquad 46.a.\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix};$ $\qquad 46.b.\quad A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix};$

$46.c.\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & -2 & 4 \end{array}\right);$ $\qquad 46.d.\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{22}x_3+\frac{24}{11} \\ \frac{25}{11}x_3-\frac{40}{11} \\ x_3 \end{pmatrix};$ $\qquad 47.a.\quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix};$

$47.b.\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix};$ $\qquad 47.c.\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 6 \end{array}\right);$ $\qquad 47.d.\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{26}{11}-\frac{5}{11}z \\ \frac{9}{11}z+\frac{6}{11} \\ z \end{pmatrix};$

$48.a.\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 14 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix};$ $\qquad 48.b.\quad A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 14 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -15 \\ 4 \end{pmatrix};$ $\qquad 48.c.\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & 14 & -2 & -15 \\ 3 & 4 & -2 & 4 \end{array}\right);$

$48.d.\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{21}{4} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix};$ $\qquad 49.a.\quad \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 6 & -2 & -5 \\ -6 & 4 & 7 \end{pmatrix};$ $\qquad 49.b.\quad A=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 6 & -2 & -5 \\ -6 & 4 & 7 \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix};$

$49.c.\quad \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -5 & 0 \\ -6 & 4 & 7 & 3 \end{array}\right);$ $\qquad 49.d.\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}-x_3 \\ x_3 \end{pmatrix};$ $\qquad 50.a.\quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix};$

$50.b.\quad A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix};$ $\qquad 50.c.\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 13 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right);$ $\qquad 50.d.\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix};$

$51.a.\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix};$ $\qquad 51.b.\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix};$

$51.c.\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 0 & 6 & -7 \\ 4 & 2 & -3 & 0 & -4 \end{array}\right);$ $\qquad 51.d.\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix};$ $\qquad 52.a.\quad \begin{pmatrix} 15 & 10 & -5 \\ 25 & -15 & -21 \\ -10 & 25 & 16 \end{pmatrix};$

$52.b.\quad A=\begin{pmatrix} 15 & 10 & -5 \\ 25 & -15 & -21 \\ -10 & 25 & 16 \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} -4 \\ -13 \\ 9 \end{pmatrix};$ $\qquad 52.c.\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 10 & -5 & -4 \\ 25 & -15 & -21 & -13 \\ -10 & 25 & 16 & 9 \end{array}\right);$

$52.d.\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{5}x_3-\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5}x_3+\frac{1}{5} \\ x_3 \end{pmatrix};$ $\qquad 53.a.\quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -11 \end{pmatrix};$ $\qquad 53.b.\quad A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -11 \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$

$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$; 53.*c.* $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -6 & 2 \\ 4 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 6 & -11 & 4 \end{array}\right)$; 53.*d.* No existe solución; 54.*a.* $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -8 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 18 & -12 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$;

54.*b.* $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -8 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 18 & -12 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$; 54.*c.* $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & -8 & 8 \\ -2 & 1 & 1 & 4 & -4 \\ -1 & -3 & 18 & -12 & 12 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 4 & -4 \end{array}\right)$;

54.*d.* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_3 \\ 5x_3 - 4x_4 - 4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$; 55.*a.* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & -2 \\ -2 & -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$; 55.*b.* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & -2 \\ -2 & -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

$b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$; 55.*c.* $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -3 & 5 & 8 \end{array}\right)$; 55.*d.* No tiene solución; 56.*a.* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5z \\ 4z \\ z \end{pmatrix}$;

56.*b.* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13w - 19z \\ 8z + 4w \\ z \\ w \end{pmatrix}$; 56.*c.* Solución trivial; 56.*d.* Solución trivial; 56.*e.* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x_4 \\ -8x_4 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$;

56.*f.* Solución trivial; 56.*g.* Solución trivial; 56.*h.* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{71}{59}x_4 \\ -\frac{183}{59}x_4 \\ -\frac{87}{59}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$; 56.*i.* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ 7x_3 - 14x_2 \\ -5x_2 \end{pmatrix}$;

57.1. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; 57.2. $\begin{pmatrix} -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$; 57.3. $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$; 57.4. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; 57.5. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

57.6. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$; 57.7. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -7 & 3 \end{pmatrix}$; 57.8. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 57.9. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

57.10. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; 57.11. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$; 57.12. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

58.1.a. $\alpha \in \mathbb{R} - \{9\}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; 58.1.$b$. $\alpha = 9$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-1 \\ -2z+1 \\ z \end{pmatrix}$; 58.1.$c$. No existe α;

58.2.a. $\alpha \in \mathbb{R} - \{8\}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$; 58.2.$b$. $\alpha = 8$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - \frac{5}{3}z \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{3}z \\ z \end{pmatrix}$; 58.2.$c$. No existe α;

58.3.a. $\alpha \in \mathbb{R} - \{-15\}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; 58.3.$b$. $\alpha = -15$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-5z \\ 3 \\ z \end{pmatrix}$; 58.3.$c$. No existe α;

58.4.a. $\alpha \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5a}{2\alpha+1} \\ \frac{6\alpha+13}{2\alpha+1} \\ -\frac{5}{2\alpha+1} \end{pmatrix}$; 58.4.$b$. No existe α; 58.4.c. $\alpha = -\frac{1}{2}$;

58.5.a. $\alpha \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; 58.5.$b$. No existe α; 58.5.c. No existe α; 58.6.a. No existe α;

58.6.b. $\alpha = -1$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-2z \\ 5+z \\ z \end{pmatrix}$; 58.6.$c$. $\alpha \neq -1$; 58.7.a. $\alpha \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{187}{791}\alpha \\ -\frac{250}{791}\alpha \\ -\frac{88}{791}\alpha \end{pmatrix}$;

58.7.b. No existe α; 58.7.c. No existe α; 58.8.a. $\alpha \notin \{0,2,3\}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha(3-\alpha)(\alpha-2)} \\ \frac{3-\alpha}{4-2\alpha} \\ \frac{1}{3\alpha-9} \end{pmatrix}$; 58.8.$b$. No existe α;

58.8.c. $\alpha \in \{0,2,3\}$; 58.9.a. $a \neq 0$ y $b = 0$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; 58.9.$b$. $a = 0$ y $b = 0$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z-1 \\ z+2 \\ z \end{pmatrix}$;

58.9.c. $b \neq 0$; 58.10.a. $\alpha \neq \pm 3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3a+8}{a+3} \\ \frac{1}{a+3} \end{pmatrix}$; 58.10.$b$. $\alpha = 3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-y \\ y \end{pmatrix}$; 58.10.$c$. $\alpha = -3$;

58.11.a. $a = 4$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$; 58.11.$b$. No existe α; 58.11.c. $a \neq 4$; 58.12.a. $\lambda \neq \pm 2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8\lambda-1}{\lambda+2} \\ \frac{2(1-\lambda)}{\lambda+2} \\ \frac{-1}{\lambda+2} \end{pmatrix}$;

58.12.b. $\lambda = 2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17z+8 \\ -6z-2 \\ z \end{pmatrix}$; 58.12.$c$. $\lambda = -2$; 59.a. $\alpha \neq \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$; 59.$b$. $\alpha = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$;

59.c. No existe α; 60.a. No existe α; 60.b. No tiene solución.; 61. $\left(-\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$

1. **Grossman, Staley I.**: "*Álgebra lineal*". Quinta edición. Mc Graw Hill.

2. **Rangel, J., y otros**: "*Problemario de álgebra lineal*". Universidad Metropolitana. 1997.

e-mail : farith.math@gmail.com